Teorema di Elettrocinematica

La corrente ai terminali di un dispositivo elettronico è una quantità fondamentale per lo studio del suo comportamento sia dal punto di vista del segnale che del rumore.
Questa grandezza, osservabile macroscopicamente, è il risultato di fenomeni microscopici come il movimento di singole particelle al suo interno.
Il legame che intercorre fra grandezze macroscopiche e microscopiche è descritto dal teorema di Ramo [S. Ramo, Proc. IRE, Vol. 27, p. 584, 1939] applicabile a tubi a vuoto ed a possibili estensioni.
Questo teorema può essere ricavato da un approccio più generale applicabile a qualsiasi dispositivo e qualsiasi condizione al contorno, ovvero il teorema di elettrocinematica.
Partiamo dall'espressione generale per la densità di corrente

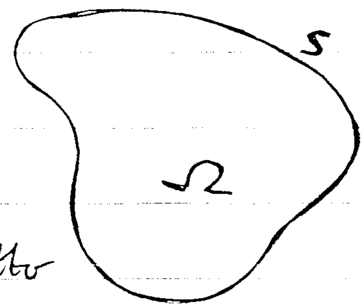
$$\underline{J} = \underline{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (1)$$

dove $\underline{J}_c$ è la densità di corrente di conduzione, $\varepsilon \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}}{\partial t}$ quella di spostamento e $\underline{\mathcal{E}}$ il campo elettrico.

Supponiamo che

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0 & (2) \\ \underline{\mathcal{E}} = -\underline{\nabla} A_0 & (3) \end{cases}$$

dove A_0 è il potenziale scalare e la (3) vale quando le dimensioni del dispositivo sono più piccole della lunghezza d'onda minima del campo $\underline{\mathcal{E}}$.
Consideriamo ora un generico campo irrotazionale $\underline{F} = -\underline{\nabla}\phi$.



Se integriamo su di un volume Ω delimitato da una superficie S il prodotto $\underline{J} \cdot \underline{F}$ otteniamo:

$$\int_\Omega \underline{J} \cdot \underline{F} \, d\Omega = \int_\Omega \left[\underline{J_c} + \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] \cdot \underline{F} \, d\Omega \quad (4)$$

Consideriamo primo e secondo membro separatamente

<u>I° membro</u>

Utilizziamo la proprietà dell'operatore nabla

$$\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{J}) = \underline{J} \cdot \underline{\nabla}\phi + \phi \underline{\nabla} \cdot \underline{J} \implies -\underline{J} \cdot \underline{\nabla}\phi = \phi \underline{\nabla} \cdot \underline{J} - \underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{J}) \quad (5)$$

Ricordando che $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$

$$\int_{\Omega} \underline{J} \circ \underline{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{J} \circ (-\underline{\nabla}\phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} \phi \, \underline{\nabla} \circ \underline{J} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\nabla} \circ (\phi \underline{J}) \, d\Omega =$$

$$= -\int_{\Omega} \underline{\nabla} \circ (\phi \underline{J}) \, d\Omega \quad (6)$$

essendo, per la (2), $\underline{\nabla} \circ \underline{J} = 0$

Ricordando inoltre il teorema di Gauss-Green

$$-\int_{\Omega} \underline{\nabla} \circ (\phi \underline{J}) \, d\Omega = -\int_{S} \phi \underline{J} \circ d\underline{S} \quad (7)$$

otteniamo infine

$$\int_{\Omega} \underline{J} \circ \underline{E} \, d\Omega = -\int_{S} \phi \underline{J} \circ d\underline{S} \quad (8)$$

<u>II° membro</u>

$$\int_{\Omega} \left[\underline{J_c} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right] \circ \underline{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{J_c} \circ \underline{E} \, d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \underline{\nabla} A_0 \circ \underline{E} \, d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \underline{J_c} \circ \underline{E} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \circ (\varepsilon \underline{E}) \, d\Omega \quad (9)$$

Utilizzando ancora la proprietà dell'operatore ∇ avremo:

$$-\underline{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \circ (\varepsilon \underline{E}) = \frac{\partial A_0}{\partial t} \underline{\nabla} \circ (\varepsilon \underline{E}) - \underline{\nabla} \circ \left[\frac{\partial A_0}{\partial t} \circ (\varepsilon \underline{E}) \right] =$$

$$= -\underline{\nabla} \circ \left[\frac{\partial A_0}{\partial t} \left(\varepsilon \underline{F} \right) \right] \qquad (10)$$

Se, vista l'arbitrarietà di $\underline{F}$, imponiamo la condizione $\underline{\nabla} \cdot (\varepsilon \underline{F}) = 0$ (11), il secondo membro si riduce a:

$$\int_\Omega \left[\underline{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] \circ \underline{F}\, d\Omega = \int_\Omega \underline{J}_c \circ \underline{F}\, d\Omega - \int_\Omega \underline{\nabla} \circ \left[\frac{\partial A_0}{\partial t} (\varepsilon \underline{F}) \right] d\Omega \qquad (12)$$

e per il teorema della divergenza

$$\int_\Omega \left[\underline{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] \circ \underline{F}\, d\Omega = \int_\Omega \underline{J}_c \circ \underline{F}\, d\Omega - \int_S \frac{\partial A_0}{\partial t} \varepsilon \underline{F} \cdot d\underline{S} \qquad (13)$$

Eguagliando primo e secondo membro otteniamo

$$-\int_S \phi \underline{J} \circ d\underline{S} = \int_\Omega \underline{J}_c \cdot \underline{F}\, d\Omega - \int_S \frac{\partial A_0}{\partial t} \varepsilon \underline{F} \circ d\underline{S}, \qquad (14)$$

ed in definitiva

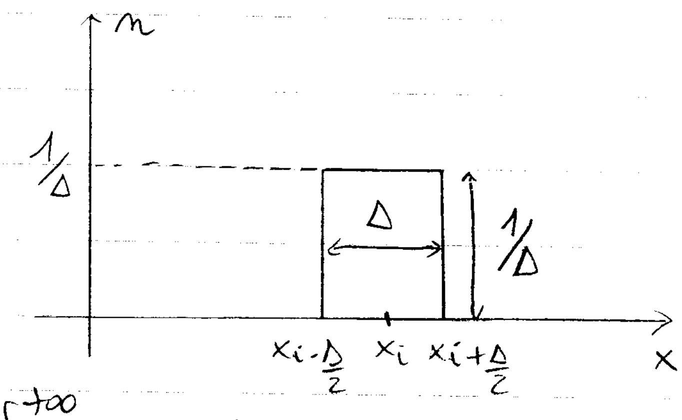
$$\boxed{\int_S \left[\frac{\partial A_0}{\partial t} \varepsilon \underline{F} - \phi \underline{J} \right] \circ d\underline{S} = \int_\Omega \underline{J}_c \cdot \underline{F}\, d\Omega \qquad (15)}$$

Se all'istante t nel volume Ω ci sono $N(t)$

particelle, la densità di corrente di conduzione può essere espressa, come è noto, nella forma

$$\underline{J_c} = \sum_{i=1}^{N(t)} q_i \underline{v_i}\, \delta(\underline{r} - \underline{r_i})$$

dove $\underline{r_i}$, $\underline{v_i}$ e q_i sono la posizione, la velocità e la carica della i-esima particella. $\delta(\underline{r} - \underline{r_i})$ rappresenta invece la densità di carica della singola particella.
Esemplifichiamo nel caso monodimensionale. Sia x_i la posizione dell'i-esima particella, che non è localizzata esattamente in x_i, ma supponiamo in un suo intorno $[x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}]$. Supponendo la carica uniformemente distribuita in tale intervallo, la densità avrà il seguente andamento



dovendo essere $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} n(x)\, dx = 1$

Se ora $\Delta \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta} \to +\infty$ e quindi

$n(x) \to \delta(x - x_i)$. In generale, nello spazio 3D avremo una densità di carica pari a

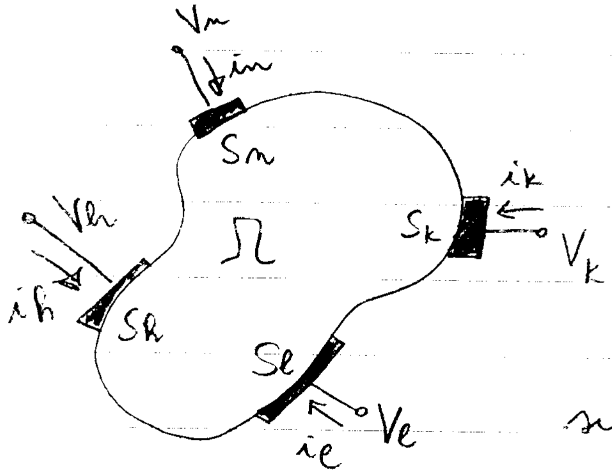
$$n(\underline{r}) = \delta(\underline{r} - \underline{r_i})$$

Sostituendo la (16) nella (15) otteniamo

$$\int_S \left[\frac{\partial A_0}{\partial t} \varepsilon \underline{F} - \phi \underline{J} \right] \cdot d\underline{S} = \sum_{i=1}^{N(t)} q_i \underline{v_i} \cdot \underline{F}(\underline{r_i}) \quad (17)$$

Le espressioni (15) e (17) che forniscono un legame generale tra densità di corrente $\underline{J}$, il potenziale A_0 sulla superficie S del volume Ω ed il moto delle cariche all'interno di Ω stesso tramite il vettore generico $\underline{F}$, esprimono il cosiddetto teorema di elettrocinematica [B. Pellegrini, Physical Review B, Vol. 34, p 5921, 1986]; [B. Pellegrini, Nuovo Cimento, Vol. 15D, p. 855, 1993].
A seconda di quale campo vettoriale $\underline{F}$ venga preso in considerazione, si possono calcolare grandezze come la potenza ($\underline{F} = \underline{E}$) e la corrente ai terminali.

Corrente



Prendiamo un volume Ω delimitato come prima da una superficie S, e su alcune parti della superficie imponiamo le condizioni di Dirichlet per ϕ ed il potenziale A_0, ovvero consideriamo degli elettrodi conduttori su alcune parti della superficie.

In particolare focalizziamo la nostra attenzione su un elettrodo h-esimo e ricaviamoci la corrente

$$i_h = -\int_{S_h} \underline{J} \cdot d\underline{s} \qquad (18)$$

Le condizioni al contorno che imponiamo sono le seguenti

$$\phi_i = \delta_{i,h} \qquad \text{dove} \qquad \delta_{i,h} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases}$$

Inoltre, il potenziale A_0 sul generico elettrodo k assume il valore V_k.

Se la superficie del k-esimo elettrodo è pari a S_k, possiamo esprimere la superficie S_R ovvero l'area di S priva di elettrodi come

$$S_R = S - \sum_{k=1}^{n} S_k \qquad (19)$$

dove n è il numero di elettrodi considerati.
In aggiunta, il potenziale A_0 può essere espresso come

$$A_0 = \sum_{k=1}^{n} A_{0k} + \sum_{i=1}^{N(t)} A_{0i}[\underline{r}_i(t), \underline{r}] \qquad (20)$$

A_{0i} è il potenziale nel punto $\underline{r}$ dovuto alla carica q_i. $A_{0i} = 0$ se $\underline{r}_i$ ed $\underline{r}$ rappresentano punti appartenenti agli elettrodi e $A_{0i} \to 0$ per $\underline{r}_i, \underline{r} \to +\infty$.
A_{0k} a sua volta è il potenziale dovuto alla tensione V_k sull'elettrodo S_k nel caso di assenza di cariche nel volume Ω e possiamo esprimerlo come $A_{0k} = V_k \Psi_k$
dove $\Psi_k = 1$ sull'elettrodo S_k e $\Psi_k = 0$ sugli altri elettrodi e per $\underline{r} \to +\infty$.
Inoltre sia $\underline{E}_k = V_k \underline{D}_k$ con $\underline{D}_k = -\underline{\nabla} \Psi_k$ e $\underline{\nabla} \cdot (\varepsilon \underline{D}_k) = 0$

Quindi

$$A_0 = \sum_{k=1}^{n} V_k(\underline{r})\, \Psi_k + \sum_{i=1}^{M(t)} A_{0i}[\underline{r_{0i}}(t), \underline{r}] \quad . (21)$$

Applicando il teorema di elettrocinematica

$$\int_S \left(\varepsilon \frac{\partial A_0}{\partial t} \underline{F_h} - \phi_h \underline{J} \right) \circ d\underline{s} = \int_r \underline{J_c} \cdot \underline{F_h}\, dr \, . \quad (22)$$

Considerando il primo membro, scomponendo l'integrale sulla superficie degli n elettrodi e su S_R:

$$\int_S \left(\varepsilon \frac{\partial A_0}{\partial t} \underline{F_h} - \phi_h \underline{J} \right) \circ d\underline{s} = \sum_{l=1}^{n} \int_{S_l} \left(\varepsilon \frac{\partial A_0}{\partial t} \underline{F_h} - \phi_h \underline{J} \right) \circ d\underline{s} +$$

$$+ \int_{S_R} \left(\varepsilon \frac{\partial A_0}{\partial t} \underline{F_h} - \phi_h \underline{J} \right) \circ d\underline{s} \quad (23)$$

Il contributo dovuto agli elettrodi sarà pari a:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{l=1}^{n} \left[\int_{S_l} \varepsilon \sum_{k=1}^{n} A_{0k} \underline{F_h} \circ d\underline{s} \right]\right] - \sum_{l=1}^{n} \int_{S_R} \phi_h \underline{J} \circ d\underline{s} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{l=1}^{n} \int_{S_l} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon A_{0k} \underline{F_h} \circ d\underline{s} \right] - \int_{S_h} \underline{J} \cdot d\underline{s} \quad (24)$$

essendo $\phi_h = 1$ solo per l'elettrodo h e nullo sugli altri elettrodi.

Considerando adesso il contributo su S_ℓ

$$\int_{S_\ell}\left(\varepsilon\frac{\partial A_0}{\partial t}\underline{F_h}-\phi_h\underline{\dot{J}}\right)\circ d\underline{s}=\int_{S_\ell}\left(\varepsilon\frac{\partial A_0}{\partial t}\underline{F_h}-\phi_h\underline{J_c}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\phi_h\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}A_0\right)\circ d\underline{s},\quad(25)$$

ricordando che $\underline{\dot{J}}=\underline{J_c}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}A_0$.

Sostituendo ad A_0 la sua forma generale e sapendo che $\int_{S_\ell}\underline{J_c}\circ d\underline{s}=0$, avremo

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{S_\ell}\varepsilon\sum_{k=1}^{n}A_{0k}\,\underline{F_h}\circ d\underline{s}+\int_{S_\ell}\varepsilon\phi_h\sum_{k=1}^{n}\underline{\nabla}A_{0k}\circ d\underline{s}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{M(t)}\frac{d}{dt}\left[\int_{S_\ell}\varepsilon\left(A_{0j}\underline{F_h}+\phi_h\underline{\nabla}A_{0j}\right)\circ d\underline{s}\right],\quad(26)$$

Quindi in definitiva, essendo inoltre $A_{0k}=0$ su S_ℓ con $\ell\neq k$,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\ell=1}^{n}\int_{S_\ell}\varepsilon A_{0\ell}\underline{F_h}\circ d\underline{s}+\int_{S_\ell}\varepsilon\sum_{k=1}^{n}A_{0k}\underline{F_h}\circ d\underline{s}+\right.$$

$$\left.+\int_{S_\ell}\varepsilon\phi_h\sum_{k=1}^{n}\underline{\nabla}A_{0k}\circ d\underline{s}\right]+\sum_{j=1}^{M(t)}\frac{d}{dt}\left[\int_{S_\ell}\varepsilon\left(A_{0j}\underline{F_h}+\phi_h\underline{\nabla}A_{0j}\right)\circ d\underline{s}\right]$$

$$+\left(-\int_{S_h}\underline{\dot{J}}\circ d\underline{s}\right)=\int_{\Omega}\underline{F_h}\circ\underline{J_c}\,d\Omega\qquad(27)$$

Definiamo, dopo aver posto $l=k$ nel primo termine di (27)

$$i_{hd} = -\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{S_k}\varepsilon A_{0k}\,\underline{F_h}\circ d\underline{s} + \int_{S_R}\varepsilon\left(A_{0k}\underline{F_h} + \phi_h \underline{\nabla} A_{0k}\right)\circ d\underline{s}\right]\right.$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{S_k}\varepsilon V_k \psi_k\,\underline{F_h}\circ d\underline{s} + \int_{S_R}\varepsilon\left(V_k\psi_k\underline{F_h} - \phi_h V_k \underline{D_k}\right)\circ d\underline{s}\right\} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{S_k}\varepsilon\psi_k\,\underline{F_h}\circ d\underline{s} + \int_{S_R}\varepsilon\left(\psi_k\underline{F_h} - \phi_h\underline{D_k}\right)\circ d\underline{s}\right]V_k\right\} \quad (2$$

Mettendo in evidenza V_k,

$$i_{hd} = \sum_{k=1}^{n} C_{hk}\frac{dV_k}{dt},$$ dove, ricordando che

$\psi_k = 1$ su S_k, definiamo

$$C_{hk} \equiv -\left[\int_{S_k}\varepsilon\,\underline{F_h}\circ d\underline{s} + \int_{S_R}\varepsilon\left(\psi_k\underline{F_h} - \phi_h\underline{D_k}\right)\circ d\underline{s}\right]. \quad (29)$$

Questa espressione può essere ulteriormente semplificata notando che:

$$\int_{\Omega}\varepsilon\,\underline{F_h}\circ\underline{D_k}\,d\Omega = -\int_{\Omega}\varepsilon\,\underline{\nabla}\phi_h\circ\underline{D_k}\,d\Omega = -\int_{\Omega}\underline{\nabla}\circ(\phi_h\,\varepsilon\,\underline{D_k})d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\phi_h\,\underline{\nabla}\circ(\varepsilon\,\underline{D_k})\,d\Omega = -\int_{S}\phi_h\,\varepsilon\,\underline{D_k}\circ d\underline{s} \quad (30)$$

essendo $\underline{\nabla} \cdot (\varepsilon \underline{D_k}) = 0$

Ulteriormente

$$\int_\Omega \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{D_k} \, d\Omega = - \int_{S_h} \varepsilon \underline{D_k} \cdot \underline{ds} - \int_{S_R} \phi_h \varepsilon \underline{D_k} \cdot \underline{ds} \quad (31)$$

In modo analogo, il primo membro può essere espresso come

$$\int_\Omega \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{D_k} \, d\Omega = - \int_S \psi_k \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds} = - \int_{S_k} \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds} +$$

$$- \int_{S_R} \psi_k \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds} . \quad (32)$$

In definitiva:

a) $$- \int_{S_R} \psi_k \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds} = \int_\Omega \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{D_k} \, d\Omega + \int_{S_k} \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds} \quad (33)$$

b) $$\int_{S_R} \varepsilon \phi_h \underline{D_k} \cdot \underline{ds} = - \int_{S_h} \varepsilon \underline{D_k} \cdot \underline{ds} - \int_\Omega \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{D_k} \, d\Omega \quad (34)$$

Sostituendo nell'espressione di C_{hk}

$$C_{hk} = - \cancel{\int_{S_k} \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds}} + \cancel{\int_\Omega \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{D_k} \, d\Omega} + \cancel{\int_{S_k} \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{ds}} -$$

$$- \int_{S_h} \varepsilon \underline{D_k} \cdot \underline{ds} - \cancel{\int_\Omega \varepsilon \underline{F_h} \cdot \underline{D_k} \, d\Omega} \quad (35)$$

Quindi

$$C_{hk} = -\int_{S_h} \varepsilon \underline{D_k} \circ \underline{dS} \qquad (36)$$

Ritorniamo ora all'equazione (1).
Notiamo che $i_h = -\int_{S_h} \underline{J} \circ \underline{dS}$

Sostituendo i termini prima ricavati otteniamo

$$i_h = \sum_{i=1}^{N(t)} q_i v_i \underline{F_h}(\underline{r_i}) + \sum_{k=2}^{n} C_{hk} \frac{dV_k}{dt} - \sum_{j=1}^{M(t)} \frac{d\, l_{hj}}{dt} \qquad (37)$$

dove l_{hj}, che ha la dimensione di una carica, è definita da

$$l_{hj} = \int_{S_R} \varepsilon \left(A_{0j} \underline{F_h} + \phi_h \underline{\nabla} A_{0k}\right) \circ \underline{dS} \ (38);$$

l_{hj} è diverso da zero nell'intervallo di tempo t_j', t_j'' di attraversamento di Ω, durante il quale la carica q_i è esterna agli elettrodi, mentre A_0 per come è stato definito, è nullo al di fuori.

Dimostriamo ora che al fine del calcolo della densità spettrale di i_h, l'ultimo addendo della (37) sotto particolari condizioni non dà contributo.

A tal proposito, ricaviamoci il coefficiente A di Fourier del termine $\frac{dl_{h_j}}{dt}$ che serve a calcolare la densità spettrale di potenza.

$$A = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{j=1}^{M(t)} \frac{dl_{h_j}}{dt} e^{-j\omega t} dt \quad (39)$$

Se $P(T)$ è il numero di particelle che attraversano Ω nell'intervallo T, la (39) può essere scritta come

$$A = \sum_{j=1}^{P(T)} \int_{t_j'}^{t_j''} \frac{dl_{h_j}}{dt} e^{-j\omega t} dt = \sum_{j=1}^{P(T)} e^{j\omega t_j'} \int_{t_j'}^{t_j''} \frac{dl_{h_j}}{dt} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-j\omega (t-t_j')} dt$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per $e^{j\omega t_j'}$. Notiamo che il termine $e^{-j\omega(t-t_j')}$ è prossimo ad 1 per pulsazioni ω tali che $\omega \ll \frac{1}{\tau_t}$, dove $\tau_t = \max_j (t_j'' - t_j')$ è il massimo tempo di attraversamento.

A questo punto A diviene

$$A = \sum_{j=1}^{P(T)} e^{j\omega t_j'} l_{h_j}(t) \Big|_{t_j'}^{t_j''} = 0$$

essendo, per quanto detto prima, $e_{hj}(t_j') = e_{hj}(t_j'') = 0$.
Inoltre, per potenziali degli elettrodi V_K costanti $\left(\frac{dV_K}{dt} = 0\right)$, l'unico termine che contribuisce alla densità spettrale è

$$i_h = \sum_{i=1}^{N(t)} q_i \underline{v}_i \cdot \underline{F_h}(\underline{r}_i) = \int_\Omega \underline{J_c} \cdot \underline{F_c} \, d\Omega ,$$

per qualsiasi condizione al contorno di ϕ_h su S_R.